

<b>Matemática Discreta I</b> Segundo parcial	1 <sup>er</sup> Apellido: _____	18 de diciembre de 2019
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2 <sup>o</sup> Apellido: _____  Nombre: _____	Tiempo 2 horas  <b>Nota:</b> <span style="border: 1px solid black; display: inline-block; width: 60px; height: 40px; vertical-align: middle;"></span>

### Ejercicio 1 (10 puntos)

Calcula  $[7]^{1982} + [23]^{-1} \cdot [2]$  en  $\mathbb{Z}_{297}$ .

*Solución:*

Para obtener  $[7]^{1982}$  necesitamos calcular  $\phi(297) = \phi(3^3 \cdot 11) = \phi(3^3) \cdot \phi(11) = (3^3 - 3^2) \cdot 10 = 180$

Con lo que  $[7]^{1982} = [7]^{180 \cdot 11 + 2} = ([7]^{180})^{11} \cdot [7]^2 = [1] \cdot [49] = [49]_{297}$

Para calcular  $[23]^{-1}$  resolvemos la ecuación diofántica  $23x + 297y = 1$  obteniendo  $[23]^{-1} = [-142] = [155]_{297}$

Reuniendo ambos resultados obtenemos  $[7]^{1982} + [23]^{-1} \cdot [2] = [49] + [155] \cdot [2] = [49 + 310] = [359] = [62]_{297}$

### Ejercicio 2 (10 puntos)

Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} 13x \equiv 3 & (\text{mod } 144) \\ 10x \equiv 30 & (\text{mod } 216) \end{cases}$$

*Solución:*

Sabiendo que  $144 = 2^4 \cdot 3^2$  y  $216 = 2^3 \cdot 3^3$  estudiamos si cada una de las ecuaciones del sistema tiene solución.

$$\text{mcd}(13, 144) = 1 \mid 3 \Rightarrow 13x \equiv 3 \pmod{144} \text{ tiene solución.}$$

$$\text{mcd}(10, 216) = 2 \mid 30 \Rightarrow 10x \equiv 30 \pmod{216} \text{ tiene solución.}$$

$$\blacksquare 13x \equiv 3 \pmod{144} \rightarrow \begin{cases} 13x \equiv 3 & (\text{mod } 2^4) \rightarrow x \equiv 13^{-1} \cdot 3 & (\text{mod } 2^4) \\ 13x \equiv 3 & (\text{mod } 3^2) \rightarrow x \equiv 13^{-1} \cdot 3 & (\text{mod } 3^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \equiv -1 & (\text{mod } 2^4) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 3^2) \end{cases}$$

$$13^{-1} \equiv (-3)^{-1} \pmod{2^4} \equiv 5 \pmod{2^4} \text{ ya que, } (-3) \cdot 5 = -15 \equiv 1 \pmod{2^4}.$$

$$13^{-1} \equiv 4^{-1} \pmod{3^2} \equiv -2 \pmod{3^2} \text{ ya que, } (-2) \cdot 4 = -8 \equiv 1 \pmod{3^2}.$$

$$\blacksquare 10x \equiv 30 \pmod{216} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{108} \text{ (aplicando propiedad cancelativa)} \rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 & (\text{mod } 2^2) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 3^3) \end{cases}$$

Luego nos ha quedado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv -1 & (\text{mod } 2^4) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 3^2) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 2^2) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 3^3) \end{cases}$$

que tiene solución ya que,  $\text{mcd}(2^4, 2^2) = 2^2 \mid (-1 - 3)$  y  $\text{mcd}(3^3, 3^2) = 3^2 \mid (3 - 3)$ . La solución será única en  $\mathbb{Z}_{2^4 3^3}$ , y el sistema que hay que resolver, eliminando las ecuaciones que sobra, es

$$\begin{cases} x \equiv -1 & (\text{mod } 2^4) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 3^3) \end{cases}$$

$$x = (-1)3^3[3^3]_{\mathbb{Z}_{2^4}}^{-1} + 3 \cdot 2^4[2^4]_{\mathbb{Z}_{3^3}}^{-1} + 2^4 3^3 t = -27 \cdot 3 + 48 \cdot 49 + 2^4 3^3 t = 2271 + 2^4 3^3 t = 111 + 432k$$

- $27 \equiv 11 \pmod{2^4}$  y  $11^{-1} \equiv 3 \pmod{16}$ .
- $16^{-1} \equiv (4^2)^{-1} \pmod{3^3} \equiv (4^{-1})^2 \pmod{3^3} \equiv 7^2 \pmod{9}$ .

### Ejercicio 3

El profesor de logística prepara el examen de los temas 1 y 2 de su asignatura.

- (5 puntos)** Si el examen es un cuestionario de 10 preguntas seleccionadas de entre 25 del tema 1 y 40 del tema 2, eligiendo al menos cuatro preguntas de cada tema, ¿cuántos exámenes distintos pueden generarse?
- (5 puntos)** El examen se realiza en un aula especial con filas de 17 asientos cada una. Si en cada fila se sitúan cinco alumnos, y dos alumnos consecutivos deben estar separados por al menos dos asientos vacíos, ¿de cuantas formas distintas podemos colocar a Susana, Victoria, Carmen, Jesús y Luis en una determinada fila?
- (3 puntos)** Cada ejercicio se califica con 0 o 1 puntos, siendo la nota final un entero entre 0 y 10. Si la suma de notas de los 95 alumnos es 580, razone cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
  - Al menos un alumno ha obtenido una calificación de 7.
  - Al menos un alumno ha obtenido una calificación superior a 7.
  - Al menos un alumno ha obtenido una calificación inferior a 7.

*Solución:*

- Como debe haber al menos cuatro preguntas de cada tema, las opciones son: 4 - 6, 5 - 5 y 6 - 4. Por tanto el número de opciones será:

$$C_{25,4} \cdot C_{40,6} + C_{25,5} \cdot C_{40,5} + C_{25,6} \cdot C_{40,4} = \binom{25}{4} \cdot \binom{40}{6} + \binom{25}{5} \cdot \binom{40}{5} + \binom{25}{6} \cdot \binom{40}{4} =$$

$$\frac{25!}{21!4!} \cdot \frac{40!}{34!6!} + \frac{25!}{20!5!} \cdot \frac{40!}{35!5!} + \frac{25!}{19!6!} \cdot \frac{40!}{36!4!}$$

- Determinamos en primer lugar qué cinco asientos se van a ocupar. Para ello partimos de considerar que hay 5 asientos ocupados con dos asientos libres entre cada dos de ellos, con lo que tenemos asignados  $5 + 4 \times 2$  asientos, quedándonos  $17 - 13 = 4$  asientos libres para repartir entre seis posibles ubicaciones. Por último distribuimos los cinco alumnos en los cinco asientos ocupados. En definitiva el número de opciones se corresponde con:

$$CR_{6,4} \cdot P_5 = \binom{9}{4} 5! = \frac{9!5!}{5!4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

- De acuerdo con el teorema de las cajas generalizado, considerando que  $580/95 = 6,11$ , deberá haber al menos un alumno con una calificación mayor o igual a siete, y al menos un alumno con una calificación menor o igual a 6.
  - No podemos afirmar que al menos un alumno haya obtenido una calificación de 7, ya que el teorema solo nos indica que al menos uno la habrá obtenido mayor o igual a 7, pero no necesariamente igual.
  - No podemos afirmar que al menos un alumno haya obtenido una calificación superior a 7, ya que el teorema solo nos indica que al menos uno la habrá obtenido mayor o igual a 7, pero no necesariamente mayor.
  - En cambio, si es verdadero que al menos un alumno ha obtenido una calificación inferior a 7 (que se corresponde con menor o igual a 6).

#### Ejercicio 4

Un fabricante produce bombones de 5 sabores distintos y los comercializa en cajas de 24 bombones. Razona las siguientes opciones, y desarrolla las fórmulas utilizadas.

- a) **(3 puntos)** ¿Cuántas cajas diferentes podría comercializar el fabricante?
- b) **(4 puntos)** ¿Cuántas cajas diferentes podría comercializar el fabricante si hubiera a lo sumo 9 bombones de un mismo sabor en cada caja?

*Solución:*

- a) El número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ 0 \leq x_i, i \in \{1, 2, \dots, 5\} \end{cases}$$

$$\text{es } CR_{5,24} = \binom{28}{4} = \frac{28!}{24!4!}.$$

- b) El número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ 0 \leq x_i \leq 9, i \in \{1, 2, \dots, 5\} \end{cases}$$

es  $\text{card}(X - \cup_{i=1}^5 A_i)$  siendo  $X = \{\text{soluciones enteras no negativas}\}$ ,  $A_i = \{\text{soluciones de } X \text{ con } x_i \geq 10\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ .

Por tanto, el número de cajas es

$$\text{card}(X - \cup_{i=1}^5 A_i) = CR_{5,24} - (C_{5,1} \cdot CR_{5,14} - C_{5,2} \cdot CR_{5,4}) = \binom{28}{4} - 5\binom{18}{4} + 10\binom{8}{4}$$

#### Ejercicio 5

- a) **(4 puntos)** Halla una relación de recurrencia para el número de listas  $a_n$  de longitud  $n \geq 1$ , formadas con los elementos A, B, C, y D, en las que el elemento B no aparece en la posición inmediatamente posterior a una A.
- b) **(6 puntos)** Resuelve la siguiente relación de recurrencia con condiciones iniciales.

$$\begin{cases} a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot 5^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 25, a_1 = 47 \end{cases}$$

*Solución:*

- a)

$$\begin{cases} a_n = 4 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 4, a_2 = 15 \end{cases}$$

- b) Solución general de la homogénea asociada:  $S(n) = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n$

Solución particular de la completa:  $P(n) = 25 \cdot 5^n = 5^{n+2}$

Solución general de la completa:  $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n + 5^{n+2}$

Imponiendo las condiciones iniciales:  $a_n = -26 \cdot n \cdot 3^n + 5^{n+2}$